Examen: Limbaje formale şi automate
Examenul din 23 iunie 2016,
Universitatea din Bucureşti

durata examenului: 2 ore

Nume şi prenume:

Grupa: Varianta **A**

Nota obţinută la laborator: (dacă vă amintiţi):

Numele tutorelui de laborator: (dacă vă amintiţi):

Precizati clar la fiecare problemă dacă alegeţi problema propusă sau cea alternativă.

1. (10 puncte) Să se demonstreze echivalenta automatelor finite cu expresiile regulate.
(Alternativ pentru 5 puncte: Demonstrati ca limbajele regulate sunt inchise la reuniune, intersectie si concatenare.)

Echivalenta REG ↔ FA:
DFA si NFA sunt echivalente intre ele
➡ este suficient sa aratam echivalenta DFA → REG si REG → NFA

(I) DFA → REG
Pas 1) introducem o singura stare initiala qi si o singura stare finala qf
Pas 2) pt orice triunghi de forma
 x → z prin e_xz
 x → y prin e_xy
 y → y prin e_yy
 y → z prin e_yz
inlocuim tranzitia e_xz cu e_xz | e_xy e_yy* eyz si stergem starea y,
unde o tranzitie lipsa este notata cu Ø si avem proprietatile:
- Ø* = λ   Øa = Ø   Ø|a = a
- λ* = λ   λa = a   λ|a = λ|a
Repeta Pas 2 pana cand raman doar starile qi si qf

(II) REG → NFA
Inlocuim recursiv expresia regulata dupa regulile:
- A|B devine x → y prin A si x → y prin B
- AB devine x → y prin A si y → z prin B
- A* devine x → x prin A
- A+ devine x → x prin A si x → y prin A

REG inchisa la U:
construim un automat nou A ai L(A) = L(A1) U L(A2)
- A contine pe A1 si A2, ie: reuniunile Q, Σ, 𝛿, F
- starea initiala a lui A este qi cu
qi → q0 din A1 prin λ
qi → q0 din A2 prin λ

REG inchisa la concatenare:
construim un automat nou A ai L(A) = L(A1)L(A2)
- A contine pe A1 si A2, ie: reuniunile Q, Σ, 𝛿, F
- starea initiala a lui A este q0 al lui A1
- adaugam qf → q0 al A2 prin λ pt fiecare stare finala qf a lui A1

REG inchisa la ∩:
- L1 ∩ L2 = C(C(L1) U C(L2))
REG inchisa la C (complementare):
schimbam intre ele starile finale/nefinale;
- pt M = (Q, Σ, 𝛿, q0, F) construim
- C(M) = (Q, Σ, 𝛿, q0, Q \ F)

2. (10 puncte) Demonstraţi că limbajele independente de context sunt inchise la substitutii independente de context.
(Alternativ pentru 5 puncte: Enuntati PCP si enuntati 2 proprietăţi de ne-decidabilitate pentru gramaticile independente de context.)

substitutie s: fiecare simbol a din limbajul L este inlocuit cu un limbaj CFL s(a)
- redenumim variabilele ai L si fiecare limbaj din s sa fie unice
- fiecare simbol a este inlocuit de simbolul de start S din s(a)

PCP:
- curs12.pdf, pag 3

Probleme decizie CFL:
decidabile:
- reuniune
- concatenare
- trivialitate L(G) = Ø
- finitudine
- apartenenta
- substitutie
ne-decidabile:
- incluziune
- echivalenta
- complemente
- intersectie
- diferenta

Nume şi prenume: grupa:
Spuneţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau nu, justificaţi pe scurt răspunsul.

3. (5 puncte) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \cup L_2 = L_3$ şi $L_2, L_3 \in REG$. Avem aşadar că $L_1 \in REG$? Unde REG este familia limbajelor regulate (recunoscute de expresii regulate).

L1 (?) U L2 (REG) = L3 (REG)

L1 = {a^p | p - numar prim}
L2 = {a^n | n ≥ 0}
L3 = a^n

L2, L3 ∊ REG
L1 ∉ REG (dem prin Lema de Pompare pt REG)

4. (5 puncte) Există o gramatică regulată G peste alfabetul $\{a, b, c\}$ astfel încât nu există niciun NFA A cu proprietatea că $L(A) = L(G) \cup \{acccab, bbaabb\}$?

exista un automat A echivalent cu gramatica G (din echivalenta REG ↔ FA)
extindem A pt a accepta acccab:
- q0 → q01 prin a
- q01 → q02 prin c
...
- q05 → q06 prin b
analog pt bbaabb

Deci ∃ A ai L(A) = L(G) U {acccab, bbaabb}

5. (5 puncte) Există limbaje modelate de gramatici independente de context care au toate cuvintele de lungime impară şi nu pot fi modelate de automate push-down deterministe?

L(G) = {palindroame de lungime impara}; S → aSa | bSb | c
un cuvant din L(G) nu poate fi parsat de un DPDA, fara a-i citi toate simbolurile
- q0 → q0 prin a; λ in ★ (numarul de stele denota numarul de simboluri a)
- q0 → q1 prin c; ★ in ★ (lasa intact)
- q0 → q1 prin c; \$ in \$ (cuvantul este doar simbolul c)
- q1 → q1 prin b; λ in ★ (acceptare prin vidarea stivei)

Deci L(G) nu poate fi modelat de un DPDA

6. (5 puncte) Este decidabil dacă limbajele acceptate de un NFA cu λ miscari şi o gramatică regulată cu cel mult 20 de productii sunt egale sau nu?

λ-NFA si gramatica regulata apartin REG
REG inchis la incluziune: L1 ⊆ L2 ⇔ L1 ∩ C(L2) = ∅
(pt ca REG inchis la intersectie, complementare si trivialitate)
L(A) = L(G) ⇔ L(A) ⊆ L(G) si L(A) ⊆ L(G)

Deci problema echivalentei este decidabila

7. (10 puncte) a. Daţi o gramatică independentă de context cu 7 productii, 2 din ele sa fie producţii unitare (unit production) şi care are cel puţin 2 simboluri neterminale (nonterminating) si un simbol incaccesibil (unreachable).

b. Transformaţi gramatica de la punctul a. într-o gramatică în Forma Nornala Chomsky.

ALTERNATIV pentru max 5 puncte: a) să se construiască un λ-NFA (care nu este DFA si nici NFA) cu cel putin 6 stari; b) să se construiască DFA-ul echivalent pentru automatul de la a).

transformare CNF:
- stefann.eu/formal-labs/lab5

transformare λ-NFA → DFA:
- stefann.eu/formal-labs/lab2
- stefann.eu/formal-labs/lab3

Nume şi prenume: grupa:

8. (10 puncte) Spuneţi dacă limbajul următor este independent de context sau nu; dacă da, construiţi o gramatică independentă de context care sa îl genereze, dacă nu, demonstraţi folosind eventual lema de pompare că limbajul nu este independent de context.
$L = \{a^{m+n}b^k a^{m+k} b^n \mid k, m, n \geq 1\}$
ALTERNATIV pentru max 5 puncte: $\mathrm{L} = \{wc^i w^R \mid w \in \{a,b\}^*, i \geq 1\}$, unde ^{R} inseamna oglinditul cuvantului: $abcaa^R = aacba$.

Demonstratie 10p:

Enunt Lema de Pompare pt CFL la final (pag 8)

Pp L ∊ CFL ➡ ∃ p > 0
aleg m = n = p si k = 1 ➡ w = a^(2p) v a^p+1 b^p
w = a...aa...a b a...aa b...b
vxy poate fi:
1 - doar in primele a-uri
2 - v sau y sa fie doar primul b
3 - sa prinda din primele a-uri, primul b si urm. a-uri
4 - doar din urm. a-uri
5 - sa prinda din urm. a-uri si ultimele b-uri
6 - doar in ultimele b-uri

1 - w0 scade numarul de a-uri din prima parte cu p
2 - w0 inlatura b-ul
3 - w2 introduce inca un b intre grupurile de a
4 - w0 scade numarul de a-uri din a doua parte cu p
5 - w2 amesteca simbolurile a si b la finalul cuv
6 - w0 scade numarul de b-uri cu p

Deci L ∉ CFL

Gramatica 5p:
S → aSa | bSb | C
C → cC | λ

S genereaza palindroame din constructie
C genereaza unul sau mai multe simboluri c

9. (10 puncte) Spuneţi dacă limbajul următor este sau nu regulat. Dacă limbajul este regulat construiţi un automat finit determinist care să îl accepte, dacă nu, demonstraţi folosind lema de pompare pentru REG că limbajul nu este regulat $L = \{wa^k w \mid w \in \{a,b,c\}^*, k \geq 0\}$.
ALTERNATIV pentru max 5 puncte: $L = \{a^{k-1}b^{2k+3} \mid k \geq 5\}$.

Enunt Lema de Pompare pt REG:
Un cuvant suficient de lung trebuie sa aiba o bucla in el. Inseamna ca bucla o putem repeta din nou
Daca L ∊ REG, Atunci ∃ p > 0 ai ∀ w ∊ L cu |w| ≥ p se poate imparti in w = xyz ai:
- |y| > 0 (subsirul pompabil, bucla nevida)
- |xy| ≤ p (bucla in primele p simboluri)
- x y^k z ∊ L ∀ k ≥ 0 (in limbaj repetat de zero sau oricate ori)

Demonstratie 10p:
Pp L ∊ REG ➡ ∃ p > 0
- aleg w = b^p a b^p ∊ L
  - |w| = p+1+p
- singura alegere posibila: y = b^n
  - n > 0 (|y| > 0)
  - dintre primele p simboluri b (|xy| ≤ p)
- w0 = x y^0 z = xz = b^(p-n) a b^p
- cum n > 0 ➡ p-n < p ➡ w0 ∉ L

Deci L ∉ REG

Demonstratie 5p:
Pp L ∊ REG ➡ ∃ p > 0
- notez p' = min(p, 5) + 1
- aleg w = a^(p'-1) b^(2p'+3)
  - |w| > p-1 + 2p+3
- singura alegere posibila: y = a^n
  - n > 0 (|y| > 0)
  - pt ca satisface |xy| ≤ p
- w0 = x y^0 z = xz = a^(p'-1-n) b^(2p'+3)
- n > 0 si k > 1 ➡
  avem mai putine a-uri si la fel de multe b-uri

Deci L ∉ REG

10. (10 puncte) Spuneţi dacă limbajul următor este independent de context sau nu; dacă da, construiţi o gramatică independentă de context care sa îl genereze, dacă nu, demonstraţi folosind eventual lema de pompare că limbajul nu este independent de context.
$L = \{a^n b^m c^r \mid n \geq m \geq r \geq 150\}$.
ALTERNATIV pentru max 5 puncte: $L = \{a^{2k} b^{3k} a^{5k} \mid k \geq 2\}$.

Demonstratie 10p:
Pp L ∊ CFL ➡ ∃ p > 0
aleg n=m=r=p ➡ w = a^p b^p c^p
w^0 nu e in limbaj orice simboluri ar alege v si y
explicatie amanuntita:
https://en.wikipedia.org/wiki/Pumping_lemma_for_context-free_languages#Usage_of_the_lemma

Demonstratie 5p:
Pp L ∊ CFL ➡ ∃ p > 0
aleg k=p ➡ w = a^2k b^3k a^5k
w^0 nu e in limbaj orice simboluri ar alege v si y
explicatie foarte similara cu demonstratia de 10p

11. (10 puncte) Construiţi un automat pushdown (PDA), pentru limbajul
$L = \{a^n b^{2m+1} \mid m \neq n\}$.
ALTERNATIV pentru 5 puncte: $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a = |w|_b > 2\} \cup \{aaab, bbba\}$.

Automat 10p:
C(L) = {a^n b^(2m+1) | m = n}
- q0 ➝ q0 prin a; λ in ★ (numaram cate simboluri a apar)
- q0 ➝ q1 prin b; ★ in λ (pt +1 din 2m+1)
- q1 ➝ q2 prin b; ★ in λ (marcam cate doua a...)
- q2 ➝ q1 prin λ; ★ in λ (...pt fiecare simbol b)
- q1 ➝ q3 prin λ; $ ➝ $ FINAL (am terminat b-urile marcand cate un b pt fiecare doua a-uri)

Inversand C(L) obtinem L, adica toate starile finale devin ne-finale si vice versa (pt m ≠ n)

Automat 5p:
- q0 ➝ q0 prin a; λ in a (notam ca am citit un a)
- q0 ➝ q0 prin b; λ in b (notam ca am citit un b)
- q0 ➝ q0 prin a; b in λ (anulam un b la citirea unui a)
- q0 ➝ q0 prin b; a in λ (anulam un a la citirea unui b)
- q0 ➝ q1 prin λ; $ ➝ $ FINAL (in starea finala voi ramane doar daca am terminat cuvantul si nimic ramas de anulat pe stiva)

CIORNĂ: P1

Nume şi prenume: grupa:

BONUS. (10 puncte) Există $L_1 \in CF - REG$, $L_2 \in REG$ astfel încât $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \{a\}^*$?

https://en.wikipedia.org/wiki/Parikh%27s_theorem pt alfabet cu un singur simbol

.

Enunt Lema de Pompare pt CFL:
Un arbore de derivare suficient de mare trebuie sa contina o variabila repetata ➡ o putem repeta din nou
Daca L ∈ CFL, Atunci ∃ p > 0 ai ∀ w ∈ L cu |w| ≥ p se poate imparti in w = uvxyz ai:

- |vxy| ≤ p (pompabilele nu mai departate de p)
- |vy| ≥ 1 (pompabile nu vide in acelasi timp)
- u v^k x y^k z ∈ L ∀ k ≥ 0 (pompabilele repetate de oricate, dar acelasi, nr de ori)